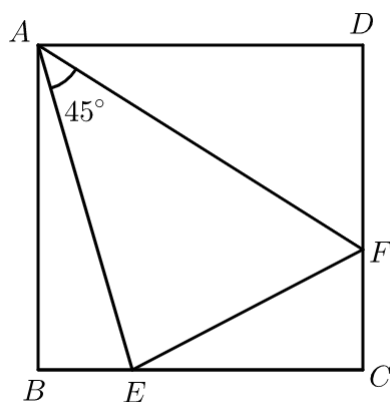


第3讲半角模型和悬挂模型(加油站)

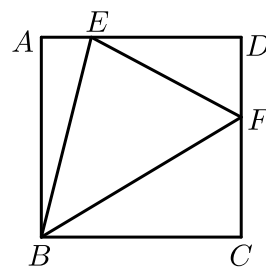
一、半角模型

练习1

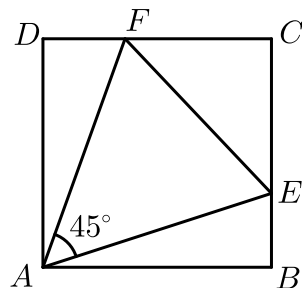
1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $EF = 5$ ， $BE = 2$ ， $DF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，点 E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上， $\angle EBF = 45^\circ$ ，则 $\triangle EDF$ 的周长等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle ECF$ 的周长为8，则正方形 $ABCD$ 的面积为（ ）。



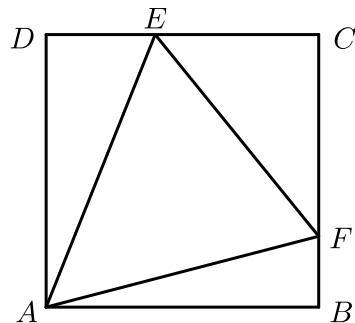
A. 9

B. 16

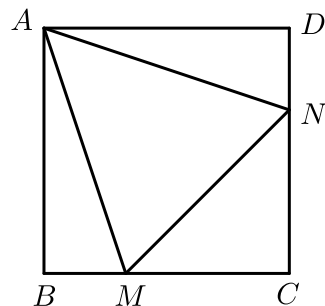
C. 20

D. 25

4. 在正方形 $ABCD$ (四边相等 , 四个内角都等于 90°) 中 , E 、 F 分别为 DC 、 BC 上的点 . 若 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形的周长的一半 , 则 : ① $\angle EAF = 45^\circ$; ② FA 平分 $\angle EFB$; ③ EA 平分 $\angle DEF$, 其中正确的是 () .



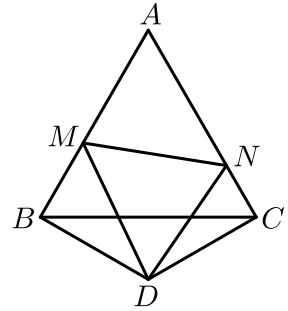
- A. ① B. ①② C. ①②③ D. ②③
5. 如图 , 已知 : 正方形 $ABCD$ 中 , $\angle MAN = 45^\circ$, $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转 , 它的两边分别交线段 CB 、 DC 于点 M 、 N .



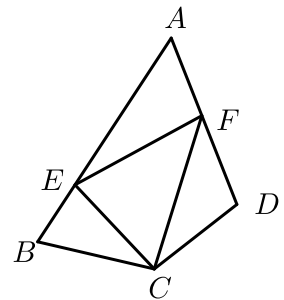
- (1) 求证 : $BM + DN = MN$.
- (2) 求证 : $C_{\triangle CMN} = 2AB$.
- (3) 求证 : $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ADN}$.
- (4) 求证 : AM 平分 $\angle BMN$.
- (5) 求证 : 过点 A 作 $AH \perp MN$, 垂足为 H , 求证 : $AH = AB$.

练习2

6. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ ．以 D 为顶点作一个 60° 角，使其两边分别交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，连接 MN ，则 $\triangle AMN$ 的周长为 _____ ．

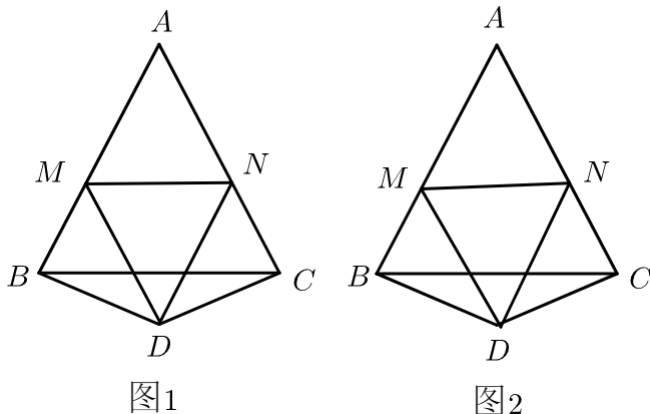


7. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $BC = CD$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， E ， F 分别为 AB ， AD 上的点， $\angle ECF = \angle A = 60^\circ$ ．



- (1) 求证： $EF = BE + DF$ ．
 (2) 求证：点 C 在 $\angle BAD$ 的平分线上 ．

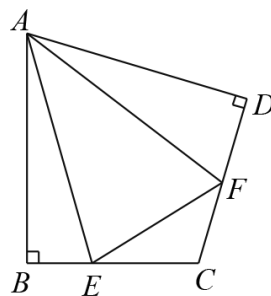
8. 在等边三角形 ABC 的两边 AB 、 AC 所在直线上分别有两点 M 、 N ， D 为三角形 ABC 外一点，且 $\angle MDN = 60^\circ$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ， $BD = DC$. 探究：当 M 、 N 分别在直线 AB 、 AC 上移动时， BM 、 NC 、 MN 之间的数量关系.



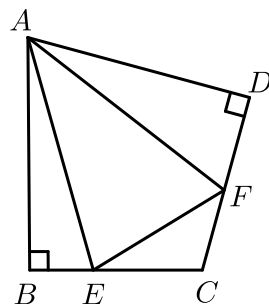
- (1) 如图1，当点 M 、 N 在边 AB 、 AC 上，且 $DM = DN$ 时， BM 、 NC 、 MN 之间的数量关系是？
- (2) 如图2，点 M 、 N 在边 AB 、 AC 上，且当 $DM \neq DN$ 时，猜想(1)问的结论还成立吗？写出你的猜想并加以证明.

练习3

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ ， $BE = 2$ ， $DF = 3$ ，则 EF 的值为_____.



10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ，则 EF 和 BE ， FD 的关系是（ ）。

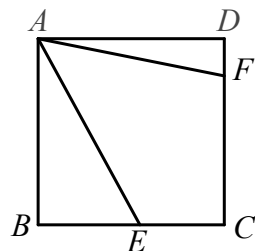


- A. $EF = 2BE - \frac{1}{2}FD$ B. $EF = BE + FD$ C. $EF = 3BE - FD$ D. $EF = \frac{1}{2}BE + 2FD$

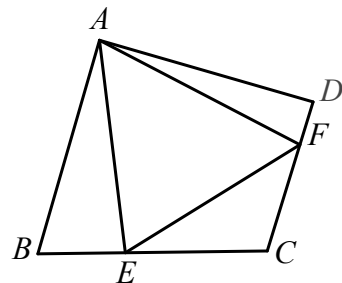
11. 完成下面问题。

- (1) 如图，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，求证：

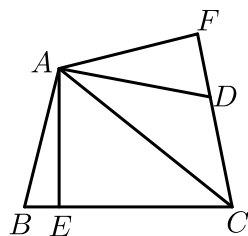
$$EF = BE + FD.$$



- (2) 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，则当 $\angle EAF$ 与 $\angle BAD$ 满足什么关系时，仍有 $EF = BE + FD$ ，说明理由。

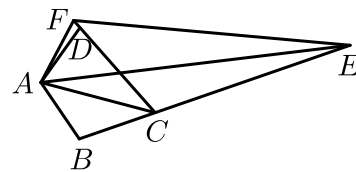


- (3) 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ， $AE \perp BC$ 于 E ， $AF \perp CD$ 交 CD 延长线于 F ，请直接写出线段 BC 、 CD 与 CE 之间的数量关系为 _____（不需证明）。



练习4

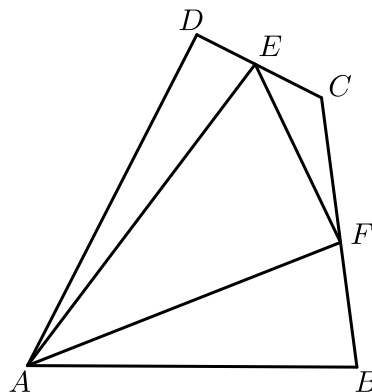
12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 延长线上的点， $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ，若 $DF = 1$ ， $BE = 5$ ，则线段 EF 的长为（ ）。



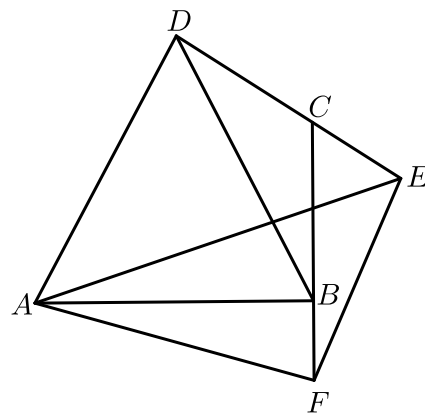
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

13. 已知，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， $\angle EAF = 30^\circ$ ， AE 、 AF 分别交射线 DC 、射线 CB 于点 E 、 F 。

(1) 如图，求证： $EF = DE + BF$ 。



(2) 如图，求证： $DE - BF = EF$ 。



14. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle MBN = 60^\circ$, $\angle MBN$ 绕 B 点旋转, 它的两边分别交 AD , DC (或它们的延长线) 于 E , F .

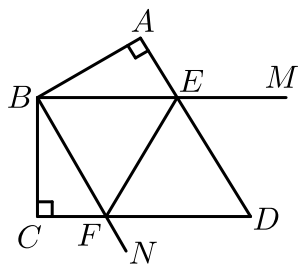


图1

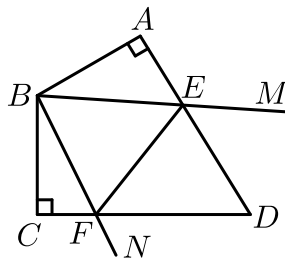


图2

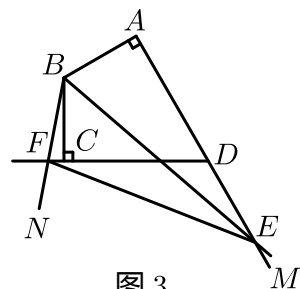
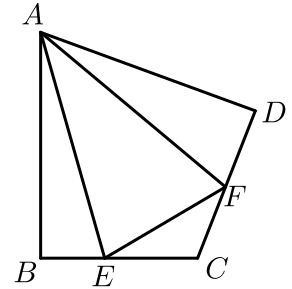


图3

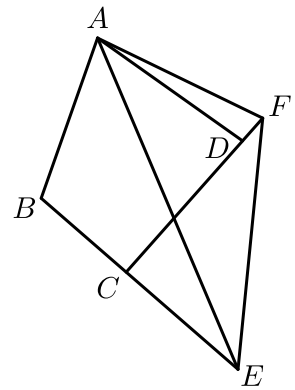
- (1) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时 (如图1), 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CBF$.
- (2) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时 (如图2), 猜想线段 AE , CF , EF 有怎样的数量关系, 并证明你的猜想.
- (3) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到图3这种情况下, 猜想线段 AE , CF , EF 有怎样的数量关系, 并证明你的猜想.

15. 探索：

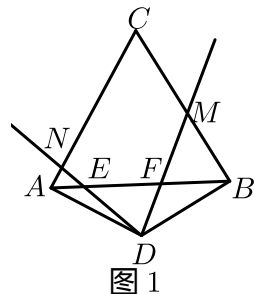
- (1) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ 。求证： $EF = BE + FD$ 。



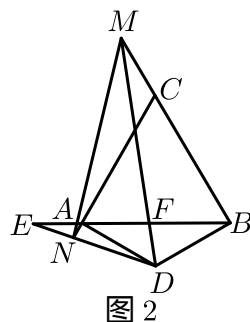
- (2) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 延长线上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ 。(1) 中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出它们之间的数量关系，并证明。



16. 四边形 $ABCD$ 是由等边 $\triangle ABC$ 和顶角为 120° 的等腰 $\triangle ABD$ 拼成，将一个 60° 角顶点放在 D 处，将该 60° 角绕 D 点旋转，该 60° 角两边分别交直线 BC 、 AC 于 M 、 N ，交直线 AB 于 E 、 F 两点，
- (1) 当 E 、 F 分别在边 AB 上时（如图1），求证： $BM + AN = MN$ 。



- (2) 当 E 、 F 分别在边 BA 的延长线上时如图2，求线段 BM 、 AN 、 MN 之间又有怎样的数量关系 _____。

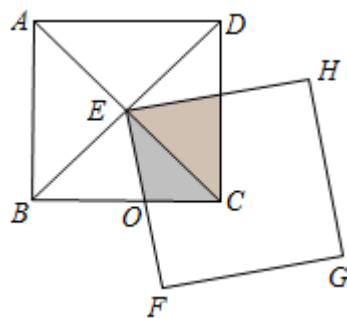


- (3) 在(1)的条件下，若 $AC = 5$ ， $AE = 1$ ，求 BM 的长。

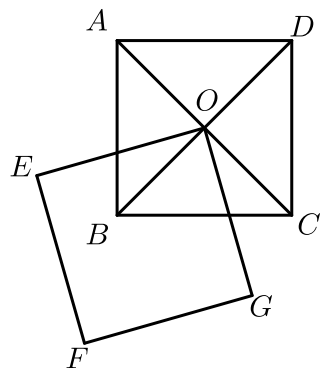
二、悬挂模型

练习5

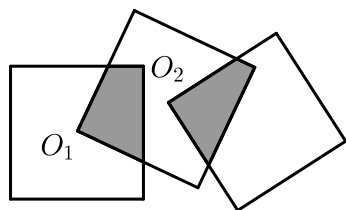
17. 已知：如图，正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 的边长都等于1，点 E 恰好是 AC 、 BD 的交点，则两个正方形的重叠部分（阴影部分）的面积是 _____。



18. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线交于 O 点，点 O 是正方形 $EFGO$ 的一个顶点，正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGO$ 的边长分别为 2cm 和 2.5cm ，两个正方形重叠的面积是 _____ 。

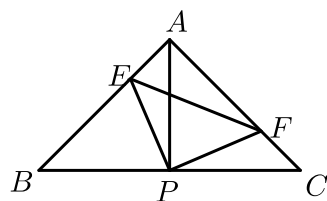


19. 如图，三个边长均为2的正方形重叠在一起， O_1 、 O_2 是其中两个正方形的中心，则阴影部分的面积是 _____ 。



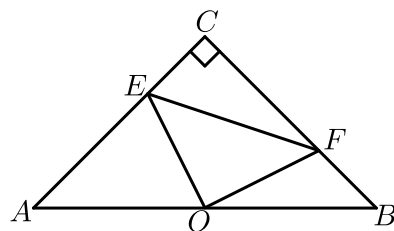
练习6

20. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 中点，两边 PE ， PF 分别交 AB ， AC 于点 E ， F ，给出以下四个结论：① $\triangle PFA \cong \triangle PEB$ ，② $EF = AP$ ，③ $\triangle PEF$ 是等腰直角三角形，④ $S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，当 $\angle EPF$ 在 $\triangle ABC$ 内绕顶点 P 旋转时（点 E 不与 A ， B 重合），上述结论中始终正确有（ ）。



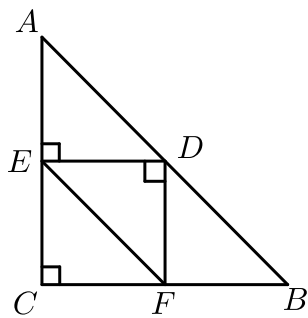
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

21. 如图，等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 O 是 AB 的中点，点 E 是线段 AC 上的一动点， $FO \perp EO$ ，交 CB 于点 F 。

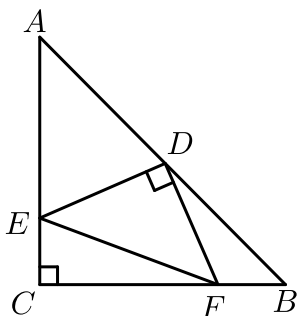


- (1) 求证： $BF = CE$ 。
 (2) 若 $AC = 4$ ，求四边形 $CEOF$ 的面积。

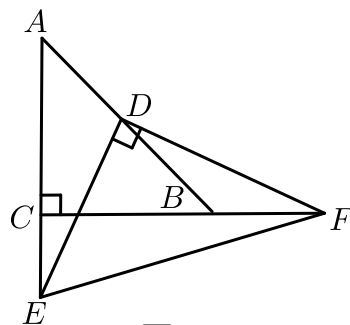
22. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 为 AB 边中点， $\angle EDF = 90^\circ$ ， $\angle EDF$ 绕点 D 旋转，它的两边分别交 AC ， CB （或它们的延长线）于点 E ， F ，当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 $DE \perp AC$ 于点 E 时（如图所示），易证 $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ 。当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 DE 和 AC 不垂直时，在图②和图③这两种情况下，上述结论是否还成立？若成立，请给予证明；若不成立， $S_{\triangle DEF}$ ， $S_{\triangle CEF}$ ， $S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明。



图①



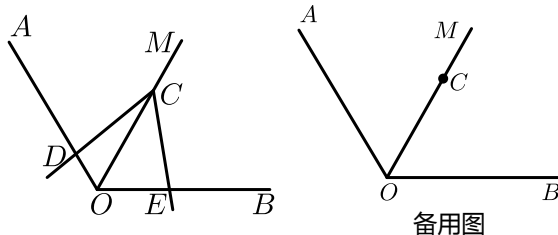
图②



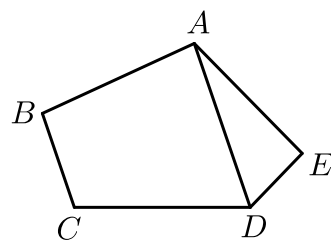
图③

练习7

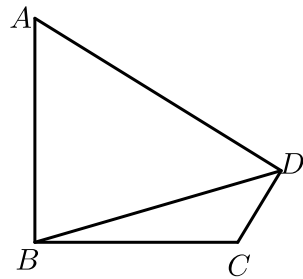
23. 如图，已知 $\angle AOB = 120^\circ$ ，在 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上有一点 C ，将一个 60° 角的顶点与点 C 重合，它的两条边分别与直线 OA ， OB 相交于点 D ， E 。下列结论：(1) $CD = CE$ ；(2) $OE + OD = OC$ ；(3) $OE - OD = OC$ ；(4) $OC = a$ ， $OD = b$ ，则 $OE = |a - b|$ ；其中正确的有()。



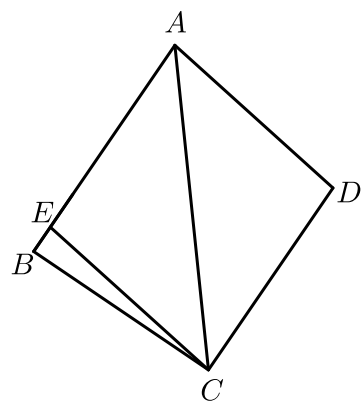
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个
24. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中， $AB = AE$ ， $BC = 2$ ， $DE = 1$ ， $\angle B + \angle E = 180^\circ$ ， $\angle BAE = 120^\circ$ ，连接 AC ， AD ， $\angle CAD = 60^\circ$ ，则 $CD =$ _____。



25. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，连接 BD ，若 $AD + CD = 10$ ，四边形 $ABCD$ 的面积为_____。



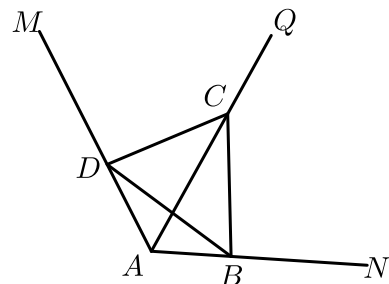
26. 如图，已知四边形 $ABCD$ 的对角互补，且 $\angle BAC = \angle DAC$ ， $AB = 15$ ， $AD = 12$ ．过顶点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，则 $\frac{AE}{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



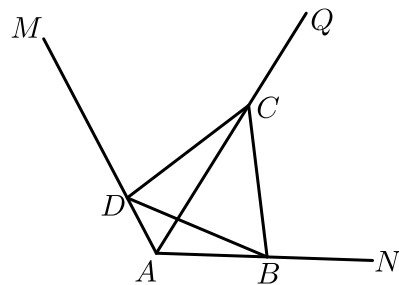
练习8

27. 已知 $\angle MAN = 120^\circ$ ，点 C 是 $\angle MAN$ 的平分线 AQ 上的一个定点，点 B ， D 分别在 AN ， AM 上，连接 BD ．

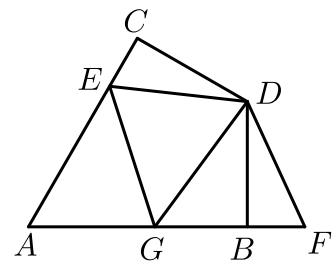
- (1) 如图，若 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，则 $\angle BCD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ， $\triangle CBD$ 是 三角形．



- (2) 如图，若 $\angle DCB = 60^\circ$ ，请判断 $\triangle CBD$ 的形状，并证明你的结论．



28. 在四边形 $ABDC$ 中, $AC = AB$, $DC = DB$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CDB = 120^\circ$, E 是 AC 上一点, F 是 AB 延长线上一点, 且 $CE = BF$.



- (1) 试说明: $DE = DF$.
- (2) 在图中, 若 G 在 AB 上且 $\angle EDG = 60^\circ$, 试猜想 CE 、 EG 、 BG 之间的数量关系并证明所归纳结论.
- (3) 若题中条件 " $\angle CAB = 60^\circ$ 且 $\angle CDB = 120^\circ$ " 改为 $\angle CAB = \alpha$, $\angle CDB = 180^\circ - \alpha$, G 在 AB 上, $\angle EDG$ 满足什么条件时, (2) 中结论仍然成立? (只写结果不要证明).